

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2009-10

Sergio Polidoro

RISULTATI DI REGOLARITÀ PER IL PROBLEMA
DELL'OSTACOLO RELATIVO AD EQUAZIONI DI
KOLMOGOROV DEGENERI

25 febbraio 2010

ABSTRACT

We prove optimal regularity for solutions to the obstacle problem for a class of second order differential operators of Kolmogorov type. We treat smooth obstacles as well as non-smooth obstacles. All our proofs follow the same line of thought and are based on blow-ups, compactness, barriers and arguments by contradiction. This problem arises in financial mathematics, when considering path-dependent derivative contracts with the early exercise feature.

1. INTRODUZIONE

Presento uno studio svolto in collaborazione con Marie Frentz e Kaj Nyström, dell'Università di Umeå, e con Andrea Pascucci. I primi risultati sono già apparsi nel lavoro [5], altri, più recenti, sono contenuti nel lavoro [12] sottoposto ad una rivista per la pubblicazione. Abbiamo studiato la regolarità per il problema dell'ostacolo relativo ad un'equazione di Kolmogorov degenera

$$(1) \quad L = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) \partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t$$

dove $(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $m \leq N$, $a_{ij}(\cdot, \cdot)$ e $b_i(\cdot, \cdot)$ sono funzioni continue e limitate e $B = (b_{ij})$ è una matrice a coefficienti costanti reali. Supponiamo verificate le seguenti ipotesi:

H1: Esiste una costante positiva λ tale che

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2, \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^m, (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1};$$

H2: l'operatore

$$(2) \quad Ku := \sum_{i=1}^m \partial_{x_i x_i} u + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u$$

è ipoellittico;

H3: i coefficienti a_{ij} , b_i , per $i, j = 1, \dots, m$, e le funzioni f, g appartengono allo spazio $C_K^{0,\alpha}$ delle funzioni Hölderiane di esponente $\alpha \in]0, 1]$, definite nel secondo capitolo.

Nel seguito denotiamo il campo vettoriale

$$Y = \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t,$$

e ricordiamo che **H2** può essere verificata per mezzo della ben nota condizione di Hörmander [6]

$$(3) \quad \text{rank Lie}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}, Y) = N + 1,$$

dove $\text{Lie}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}, Y)$ denota l'algebra di Lie generata dai campi $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}, Y$. Per semplificare la presentazione, supporremo anche verificata la seguente ipotesi:

H4: l'operatore K è omogeneo di grado due rispetto alle dilatazioni $(\delta_r)_{r>0}$ definite nella formula (15).

Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^{N+1} e sia $\partial_P \Omega$ la sua frontiera parabolica. Per i nostri scopi non è restrittivo supporre che tutti i punti di $\partial_P \Omega$ siano regolari per il problema di valori iniziali-al contorno relativo ad L . Assegnate tre funzioni continue e limitate $g, f, \psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $g \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$, consideriamo il seguente problema dell'ostacolo:

$$(4) \quad \begin{cases} \max\{Lu(x, t) - f(x, t), \psi(x, t) - u(x, t)\} = 0, & \text{in } \Omega, \\ u(x, t) = g(x, t), & \text{su } \partial_P \Omega. \end{cases}$$

La motivazione per lo studio del problema (4) si presenta nello studio delle opzioni Americane di tipo “path-dependent”. Precisamente, consideriamo un modello di mercato finanziario in cui la variabile di stato è descritta da un processo aleatorio N -dimensionale $X = (X_t^{x_0, t_0})$, che risolve la seguente equazione differenziale stocastica

$$(5) \quad dX_t^{x_0, t_0} = BX_t^{x_0, t_0} + \sigma(X_t^{x_0, t_0}, t)dW_t, \quad X_{t_0}^{x_0, t_0} = x_0,$$

dove $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$ e $W = \{W_t\}$ denota un processo di Wiener m -dimensionale, $m \leq N$. Un'opzione Americana con “pay-off” ψ è un contratto che dà al possessore il diritto di ricevere un premio pari a $\psi(X_\tau)$, se questi decide di esercitare l'opzione all'istante $\tau \in [0, T]$. La classica teoria dell'arbitraggio afferma che il prezzo equo dell'opzione Americana è dato dalla seguente formula di arresto ottimo

$$(6) \quad U(x, t) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}[\psi(X_\tau^{x, t})],$$

dove l'estremo superiore è preso nella famiglia di tutti i *tempi d'arresto* $\tau \in [t, T]$ (per semplificare le notazioni abbiamo anche supposto che il tasso di interesse sia nullo). I sottoinsiemi del dominio di U

$$\mathcal{E} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] : U(x, t) = \psi(x)\},$$

$$\mathcal{C} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] : U(x, t) > \psi(x)\}$$

sono solitamente denominati *regione di coincidenza* e *regione di continuazione*, rispettivamente. La frontiera \mathcal{F} di \mathcal{E} è chiamata *frontiera libera associata* o *frontiera di esercizio ottimo*.

Nei mercati finanziari esistono diversi tipi di opzioni Americane descritti da un'equazione stocastica (5) in cui m è strettamente minore di N e la cui equazione di Kolmogorov è, pertanto, degenera. La teoria rigorosa per la valutazione di questo tipo di opzioni, anche nel caso non degenera $m = N$, è piuttosto recente (si veda Bensoussan [1], Karatzas [8], Jalliet, Lamberton e Lapeyre [7]). Per quanto riguarda il caso degenera, a cui siamo maggiormente interessati, ricordo il lavoro [13] di Pascucci, in cui si dimostra che la funzione $u(x, t) = U(x, T - t)$ è soluzione del problema (4), con $f \equiv 0$, $g \equiv \psi$ ed $\Omega = \mathbb{R}^N \times [0, T]$. L'operatore L associato all'equazione stocastica (5) è

$$(7) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\sigma \sigma^T)_{ij} \partial_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t.$$

E' opportuno osservare che la formula (6) che definisce la soluzione $u(x, t) = U(x, T - t)$ di (4) non fornisce molte informazioni sulla sua regolarità. D'altra parte è noto che anche nel caso uniformemente parabolico, il problema dell'ostacolo non ammette soluzioni regolari (di classe C^2) ed è pertanto necessario considerare soluzioni in senso debole. Risultati di esistenza per il problema dell'ostacolo (4) relativo all'insieme $\Omega = \mathbb{R}^N \times [0, T]$ sono stati dimostrati nel lavoro [3] in collaborazione con Di Francesco e Pascucci. In [3] viene dimostrata l'esistenza e l'unicità di una soluzione distribuzionale, definita in un opportuno spazio di tipo Sobolev-Stein $S_{\text{loc}}^p(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Per quanto riguarda la regolarità della soluzione, si prova che, se l'ostacolo ψ è sufficientemente regolare, essa appartiene allo spazio $S_{\text{loc}}^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \infty[$. Inoltre si dimostra che anche le soluzioni trovate con metodi variazionali e quelle nel senso della viscosità condividono le stesse proprietà di regolarità.

Lo scopo di questo lavoro è quello di studiare la regolarità ottimale delle soluzioni negli spazi S^p e negli spazi di funzioni Hölderiane $C_K^{n,\alpha}$ definiti nel seguente capitolo. Il primo risultato che viene presentato riguarda la regolarità interna ed è stato dimostrato nel lavoro [5].

Teorema 1.1. *Supponiamo verificate le ipotesi **H1-4**. Sia $\alpha \in]0, 1]$ e siano Ω, Ω' sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^{N+1} tali che $\Omega' \subset \subset \Omega$. Sia u una soluzione del problema (4):*

i) se $\psi \in C_K^{0,\alpha}(\Omega)$ allora $u \in C_K^{0,\alpha}(\Omega')$ e

$$\|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega')} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\psi\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} \right);$$

ii) se $\psi \in C_K^{1,\alpha}(\Omega)$ allora $u \in C_K^{1,\alpha}(\Omega')$ e

$$\|u\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega')} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\psi\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega)} \right);$$

iii) se $\psi \in C_K^{2,\alpha}(\Omega)$ allora $u \in S^\infty(\Omega')$ e

$$\|u\|_{S^\infty(\Omega')} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\psi\|_{C_K^{2,\alpha}(\Omega)} \right).$$

Nel successivo lavoro [12] abbiamo esteso le stime del Teorema 1.1 all'istante iniziale. Precisamente abbiamo considerato il problema (4) nel dominio

$$(8) \quad \Omega_{t_0} := \Omega \cap \{t > t_0\}$$

con t_0 assegnato ed abbiamo provato stime di regolarità Hölderiana nell'insieme $\Omega'_{t_0} = \Omega' \cap \{t > t_0\}$ qualunque sia $\Omega' \subset \subset \Omega$. Notiamo che la stima non è una banale conseguenza del Teorema 1.1 in quanto Ω'_{t_0} non è un sottoinsieme compatto di Ω_{t_0} . Il nostro secondo risultato è:

Teorema 1.2. *Sia $\alpha \in]0, 1]$ e siano Ω, Ω' sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^{N+1} tali che $\Omega' \subset \subset \Omega$. Sia u una soluzione del problema (4) nel dominio Ω_{t_0} , $t_0 \in \mathbb{R}$, definito in (8):*

i) se $g, \psi \in C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})$ allora $u \in C_K^{0,\alpha}(\Omega'_{t_0})$ e

$$\|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega'_{t_0})} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|\psi\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})} \right);$$

ii) se $g, \psi \in C_K^{1,\alpha}(\Omega_{t_0})$ allora $u \in C_K^{1,\alpha}(\Omega'_{t_0})$ e

$$\|u\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega'_{t_0})} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|\psi\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega_{t_0})} \right);$$

iii) se $g, \psi \in C_K^{2,\alpha}(\Omega_{t_0})$ allora $u \in S^\infty(\Omega'_{t_0})$ e

$$\|u\|_{S^\infty(\Omega'_{t_0})} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{2,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|\psi\|_{C_K^{2,\alpha}(\Omega_{t_0})} \right).$$

Un risultato preliminare alla prova del Teorema 1.2 riguarda la regolarità all'istante iniziale del problema di Cauchy-Dirichlet seguente

$$(9) \quad \begin{cases} Lu(x, t) = f(x, t), & \text{in } \Omega, \\ u(x, t) = g(x, t), & \text{on } \partial_P \Omega. \end{cases}$$

Benché si tratti di un risultato più semplice di quelli contenuti nei Teoremi 1.1 e 1.2, non era ancora stato dimostrato. Poiché ha interesse indipendentemente dal problema dell'ostacolo, nel lavoro [12] ne abbiamo inserito l'enunciato e la dimostrazione.

Teorema 1.3. *Supponiamo verificate le ipotesi **H1-4**. Sia $\alpha \in]0, 1]$ e siano Ω, Ω' sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^{N+1} tali che $\Omega' \subset \subset \Omega$. Sia u una soluzione del problema (9) nel dominio Ω_{t_0} , $t_0 \in \mathbb{R}$, definito in (8):*

i) *se $g \in C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})$ allora $u \in C_K^{0,\alpha}(\Omega'_{t_0})$ e*

$$\|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega'_{t_0})} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})} \right);$$

ii) *se $g \in C_K^{1,\alpha}(\Omega_{t_0})$ allora $u \in C_K^{1,\alpha}(\Omega'_{t_0})$ e*

$$\|u\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega'_{t_0})} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega_{t_0})} \right);$$

iii) *se $g \in C_K^{2,\alpha}(\Omega_{t_0})$ allora $u \in S^\infty(\Omega'_{t_0})$ e*

$$\|u\|_{S^\infty(\Omega'_{t_0})} \leq c \left(\alpha, \Omega, \Omega', L, \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega_{t_0})}, \|g\|_{C_K^{2,\alpha}(\Omega_{t_0})} \right).$$

Ricordo infine che stime a priori interne di tipo Schauder per le equazioni di Kolmogorov sono invece state dimostrate da Manfredini in [10] e successivamente da me e Di Francesco in [4]. Ne riportiamo per completezza l'enunciato: *Supponiamo verificate le ipotesi **H1-3**. Siano dati $(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $R > 0$. Se $u \in C_{K,\text{loc}}^{2,\alpha}(Q_R(x, t))$ è soluzione di $Lu = f$ in $Q_R(x, t)$, allora esiste una costante positiva c tale che*

$$(10) \quad \|u\|_{C_K^{2,\alpha}(Q_{R/2}(x,t))} \leq c(\|u\|_{L^\infty(Q_R(x,t))} + \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q_R(x,t))}).$$

Concludo l'introduzione con alcuni commenti. Innanzitutto sono ancora pochi i risultati noti in letteratura riguardo alla regolarità vicino all'istante iniziale per il problema dell'ostacolo, persino nel caso non degenero $m = N$. In effetti siamo a conoscenza solamente

dei risultati di Nyström [11], Shahgholian [15] e di Petrosyan e Shahgholian [14]. Nel lavoro [15] vengono considerati operatori uniformemente parabolici, ma che possono anche essere di tipo “fully non-linear” mentre in [11] vengono considerati operatori, sempre uniformemente parabolici, che permettono di trattare problemi specifici di valutazione del prezzo di opzioni Americane su più titoli. Notiamo che i nostri Teoremi 1.1 e 1.2 migliorano leggermente i risultati noti anche nel caso non degenero ($m = N$ in particolare il Teorema 4.3 di [14] e i Teoremi 1.2 e 1.3 in [15]), in quanto forniscono la regolarità Hölderiana della soluzione con l’esponente ottimale.

La tecnica della dimostrazione si basa su un procedimento di “blow-up” precedentemente introdotto da Caffarelli, Petrosyan e Shahgholian [2] nello studio dell’equazione del calore. Il nucleo del ragionamento si basa sulla norma

$$(11) \quad S_k^+(u) = \sup_{Q_{2^{-k}}^+} |u|$$

dove u è una soluzione del problema dell’ostacolo, Q^+ e Q_r^+ sono i cilindri di taglia r definiti in (17). Un passaggio fondamentale nella prova dei Teoremi 1.1 e 1.2, è la dimostrazione dell’esistenza di una costante positiva \tilde{c} , che dipende dalle norme delle funzioni u, g, f, ψ , tale che

$$(12) \quad S_{k+1}^+(u - F) \leq \max \left(\tilde{c} 2^{-(k+1)\gamma}, \frac{S_k^+(u - F)}{2^\gamma}, \frac{S_{k-1}^+(u - F)}{2^{2\gamma}}, \dots, \frac{S_0^+(u - F)}{2^{(k+1)\gamma}} \right)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. In questa costruzione sceglieremo F e γ come segue:

$$\text{Teoremi 1.1 e 1.2-i):} \quad F = P_0^{(0,0)} g = g(0, 0), \quad \gamma = \alpha,$$

$$\text{Teoremi 1.1 e 1.2-ii):} \quad F = P_1^{(0,0)} g, \quad \gamma = 1 + \alpha,$$

$$\text{Teoremi 1.1 e 1.2-iii):} \quad F = P_2^{(0,0)} g, \quad \gamma = 2,$$

dove $P_n^{(0,0)}$ è il Polinomio di Taylor definito nell’Osservazione 2.1. La prova di (12) si basa su un ragionamento per assurdo.

Questa presentazione è organizzata come segue: nel Capitolo 2 vengono richiamati alcuni risultati sulle equazioni di Kolmogorov, nel Capitolo 3 si dimostra (12) e nel Capitolo 4 si fornisce la prova dei Teoremi 1.1 e 1.2 solamente per la regolarità negli spazi $C_K^{0,\alpha}$. Rimando ai lavori [5] e [12] per la dimostrazione completa.

2. RISULTATI PRELIMINARI

In questo capitolo vengono raccolti alcuni risultati che riguardano gli operatori di tipo Kolmogorov che saranno utilizzati nella prova dei Teoremi 1.1, 1.2 e 1.3. Ricordiamo innanzitutto la struttura di gruppo di Lie rispetto alla quale gli operatori di Kolmogorov a coefficienti costanti K in (2) risultano invarianti (si veda [9])

$$(13) \quad (x, t) \circ (y, s) = (y + E(s)x, t + s), \quad E(s) = \exp(-sB^T), \quad (x, t), (y, s) \in \mathbb{R}^{N+1},$$

(B^T indica la trasposta di B). Ricordiamo che una condizione equivalente alla nostra ipotesi **H2** è che, rispetto ad una opportuna base di \mathbb{R}^N , la matrice B assume la forma seguente

$$(14) \quad \begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & B_\kappa \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

dove ogni B_j è una matrice $m_{j-1} \times m_j$ di rango m_j , $1 \leq m_\kappa \leq \dots \leq m_1 \leq m$ e $m + m_1 + \dots + m_\kappa = N$. I blocchi indicati con $*$ hanno i coefficienti arbitrari, nel caso in cui i coefficienti siano tutti nulli, allora l'operatore K risulta invariante anche rispetto al seguente gruppo di dilatazioni

$$(15) \quad D_r = \text{diag}(rI_m, r^3I_{m_1}, \dots, r^{2\kappa+1}I_{m_\kappa}), \quad \delta_r = \text{diag}(D_r, r^2), \quad r > 0,$$

(I_k indica la matrice identità k -dimensionale).

Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ ed $r > 0$ indichiamo con $B_r(x)$ la palla aperta di \mathbb{R}^N di centro x e raggio r . Indichiamo con \mathbf{e}_1 il primo vettore della base canonica, e definiamo

$$(16) \quad \begin{aligned} Q &= (B_1(\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1) \cap B_1(-\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1)) \times]-1, 1[, \\ Q^+ &= (B_1(\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1) \cap B_1(-\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1)) \times]0, 1[, \\ Q^- &= (B_1(\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1) \cap B_1(-\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1)) \times]-1, 0[. \end{aligned}$$

Resta così definito un cilindro Q nelle variabili spazio e tempo, Q^+ e Q^- sono la parte superiore ed inferiore, rispettivamente. Definiamo il cilindro riscalato alla taglia $r > 0$ e traslato in $(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ ponendo

$$(17) \quad Q_r = \delta_r(Q), \quad Q_r(x, t) = (x, t) \circ Q_r, \quad Q_r^\pm = \delta_r(Q^\pm), \quad Q_r^\pm(x, t) = (x, t) \circ Q_r^\pm.$$

Un'importante proprietà dei cilindri $Q_r(x, t)$ è che il loro bordo parabolico è costituito da punti regolari per il problema di Cauchy-Dirichlet. Notiamo che, a causa di (15), l'altezza dei cilindri Q_r^\pm è esattamente r^2 . Nel seguito avremo bisogno di considerare cilindri di altezza T e raggio r , con $T \neq r^2$. Poniamo pertanto $Q^\pm(T) = (B_1(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1) \cap B_1(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_1)) \times (0, T]$, e $Q_r^\pm(x, t, T) = (x, t) \circ \delta_r(Q^\pm(r^{-2}T))$.

Definiamo una quasi-norma ed una quasi-distanza su \mathbb{R}^{N+1} ponendo

$$(18) \quad d_K((x, t), (\xi, \tau)) = \inf\{r > 0 \mid (x, t) \in Q_r(\xi, \tau)\}, \quad \|(x, t)\|_K = d_K((x, t), (0, 0)).$$

La norma risulta essere una funzione omogenea rispetto alle dilatazioni $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$ definite in (15): $\|\delta_r(x, t)\|_K = r\|(x, t)\|_K$. Vale inoltre la seguente disuguaglianza triangolare (cf. [4]): per ogni insieme compatto $H \subset \mathbb{R}^{N+1}$, esiste una costante positiva c tale che

$$(19) \quad \|z^{-1}\|_K \leq c\|z\|_K, \quad \|z \circ w\|_K \leq c(\|z\|_K + \|w\|_K), \quad z, w \in H.$$

Dalla (19) segue che, per ogni $r_0 > 0$ esiste una costante positiva c tale che:

- i) se $(x, t) \in Q_r(\xi, \tau)$ allora $(\xi, \tau) \in Q_{cr}(x, t)$ per $r \in]0, r_0[$;
- ii) se $(x, t) \in Q_r(\xi, \tau)$ allora $Q_\rho(x, t) \subseteq Q_{c(r+\rho)}(\xi, \tau)$ per $r, \rho \in]0, r_0[$.

Osserviamo anche che, di conseguenza, si ha che se $(x, t) \in Q_r(\xi, \tau)$ allora

$$(20) \quad Q_r(\xi, \tau) \subseteq Q_{C_1 r}(x, t) \quad r \in]0, r_0[,$$

per una opportuna costante positiva C_1 . Definiamo infine, per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $H \subset \mathbb{R}^{N+1}$,

$$(21) \quad d_K(z, H) := \inf \{d_K(z, w) \mid w \in H\}.$$

Introduciamo ora gli spazi di funzioni (di Hölder e di Sobolev) relativi alle equazioni di Kolmogorov. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e sia Ω un dominio di \mathbb{R}^{N+1} . Denotiamo con $C_K^{0,\alpha}(\Omega)$, $C_K^{1,\alpha}(\Omega)$

e $C_K^{2,\alpha}(\Omega)$ lo spazio di funzioni Hölderiane definite dalle seguenti norme:

(22)

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} &= \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\substack{z, \zeta \in \Omega \\ z \neq \zeta}} \frac{|u(z) - u(\zeta)|}{d_K(z, \zeta)^\alpha}, \\ \|u\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega)} &= \|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \|\partial_{x_j} u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} + \sup_{\substack{z, \zeta \in \Omega \\ z \neq \zeta}} \frac{|u(z) - u(\zeta) - \sum_{j=1}^m (z_j - \zeta_j) \partial_{x_j} u(\zeta)|}{d_K(z, \zeta)^{1+\alpha}}, \\ \|u\|_{C_K^{2,\alpha}(\Omega)} &= \|u\|_{C_K^{1,\alpha}(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^m \|\partial_{x_i x_j} u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} + \|Yu\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Osservazione 2.1. *Poniamo*

$$\begin{aligned} P_0^{(\xi, \tau)} u(x, t) &= u(\xi, \tau), \\ P_1^{(\xi, \tau)} u(x, t) &= u(\xi, \tau) + \sum_{j=1}^m (x_j - \xi_j) \partial_{x_j} u(\xi, \tau), \\ P_2^{(\xi, \tau)} u(x, t) &= u(\xi, \tau) + \sum_{j=1}^m (x_j - \xi_j) \partial_{x_j} u(\xi, \tau) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^m (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) \partial_{x_i x_j} u(\xi, \tau) - (t - \tau) Yu(\xi, \tau). \end{aligned}$$

Se $u \in C_K^{n,\alpha}$ (con $n = 0, 1, 2$) allora risulta

$$|u(x, t) - P_n^{(\xi, \tau)} u(x, t)| \leq \|u\|_{C_K^{n,\alpha}} d_K((x, t), (\xi, \tau))^{n+\alpha}.$$

Definiamo per $p \in [1, \infty]$ gli spazi di Sobolev-Stein

$$S^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u, Yu \in L^p(\Omega), i, j = 1, \dots, m\}$$

e poniamo

$$\|u\|_{S^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^m \|\partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^m \|\partial_{x_i x_j} u\|_{L^p(\Omega)} + \|Yu\|_{L^p(\Omega)}.$$

Se $u \in C_K^{n,\alpha}(\Omega')$ per ogni sottoinsieme compatto Ω' di Ω , allora scriviamo $u \in C_{K,\text{loc}}^{n,\alpha}(\Omega)$.

Se $u \in S^p(\Omega')$ per ogni sottoinsieme compatto Ω' di Ω , scriviamo $u \in S_{\text{loc}}^p(\Omega)$.

Concludo questo capitolo con l'enunciato, senza dimostrazione, di alcuni risultati che saranno utilizzati nel seguito. Nel Lemma 2.1 Γ denota la soluzione fondamentale di L .

Lemma 2.1. *Data una costante positiva γ , definiamo la funzione*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t, y, 0) \|(y, 0)\|_K^\gamma dy, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0.$$

Allora esiste una costante c_γ tale che

$$u(x, t) \leq c_\gamma \|(x, t)\|_K^\gamma.$$

Lemma 2.2. *Supponiamo verificate le ipotesi **H1-4**, e sia dato $R > 0$. Allora esistono tre costanti $R_0, C_0, C_1 > 0$, $R_0 \geq 2R$, tali che*

$$\sup_{Q_R^+} |v| \leq C_0 e^{-C_1 \tilde{R}^2} \sup_{\partial_P Q_{\tilde{R}}^+ \cap \{(x, t): 0 < t \leq R^2\}} |v|$$

per ogni $\tilde{R} \geq R_0$ e per ogni soluzione v di $Lv = 0$ in $Q_{\tilde{R}}^+(0, 0, R^2)$ tale che $v(\cdot, 0) = 0$.

Lemma 2.3. *Supponiamo verificate le ipotesi **H1-4**. Per ogni $\tilde{R} \geq 2$ esistono due costanti c e \tilde{c} tali che*

$$\sup_{Q_{\tilde{R}}^- \cap \{(x, t): t = -2\}} u \leq \tilde{c} \inf_{Q_{\tilde{R}/2}^-(0, 0, 1)} u,$$

per ogni soluzione positiva u di $Lu = 0$ in $Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 3)$ con $\tilde{R} \geq c\tilde{R}^{2\kappa+1}$.

3. PROVA DELLE STIME FONDAMENTALI

Iniziamo questo capitolo con alcune stime per il problema di Cauchy-Dirichlet.

Definizione 3.1. *Sia L u operatore della forma (1) che verifica le ipotesi **H1-4**, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un dato dominio, $n \in \{0, 1, 2\}$, $\alpha \in (0, 1]$ e siano M_1, M_2, M_3 tre costanti positive. Diciamo che (u, f, g) appartiene alla classe $\mathcal{D}_n(L, \Omega, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ se u è soluzione del problema (9) con $f \in C_K^{0, \alpha}(\Omega)$, $g \in C_K^{n, \alpha}(\bar{\Omega})$ e*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_1, \quad \|f\|_{C_K^{0, \alpha}(\Omega)} \leq M_2, \quad \|g\|_{C_K^{n, \alpha}(\Omega)} \leq M_3.$$

Lemma 3.1. *Siano $R, \alpha \in]0, 1]$, $n = 0, 1, 2$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e siano M_1, M_2, M_3 tre costanti positive. Supponiamo che*

$$(u, f, g) \in \mathcal{D}_n(L, Q_R^+(x_0, t_0), \alpha, M_1, M_2, M_3).$$

Allora esiste $C_\alpha = C(L, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ tale che

$$\sup_{Q_r^+(x_0, t_0)} |u - g| \leq C_\alpha r^{n+\alpha}, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 0, 1$$

$$\sup_{Q_r^+(x_0, t_0)} |u - g| \leq C_\alpha r^2, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 2.$$

Dim. Grazie all'invarianza di L rispetto alle traslazioni e alle dilatazioni, non è restrittivo supporre $(x_0, t_0) = (0, 0)$ ed $R = 1$. Inoltre, per l'Osservazione 2.1, è sufficiente mostrare che

$$\sup_{Q_r^+(0,0)} |u - P_n^{(0,0)} g| \leq cr^\gamma, \quad r \in]0, 1[,$$

dove $\gamma = \alpha + n$ se $n = 0, 1$ e $\gamma = 2$ se $n = 2$. Osserviamo infine che la funzione $v_n = u - P_n^{(0,0)} g$ è soluzione di

$$Lv_n = f - LP_n^{(0,0)} g =: f_n,$$

con $f_n \in C_K^{0,\alpha}$. Pertanto, non è restrittivo supporre $P_n^{(0,0)} g = 0$.

Dopo queste considerazioni preliminari, iniziamo a considerare in modo specifico il caso $n = 0$. Denotiamo con v_1, v_2, v_3 le soluzioni dei tre seguenti problemi:

$$\begin{cases} Lv_1 = 0 & \text{in } Q^+, \\ v_1 = 0 & \text{su } \partial_P^+ Q^+, \\ v_1 = g & \text{su } \partial_P^- Q^+, \end{cases} \quad \begin{cases} Lv_2 = 0 & \text{in } Q^+, \\ v_2 = g & \text{su } \partial_P^+ Q^+, \\ v_2 = 0 & \text{su } \partial_P^- Q^+, \end{cases} \quad \begin{cases} Lv_3 = -\|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)} & \text{in } Q^+, \\ v_3 = 0 & \text{su } \partial_P Q^+, \end{cases}$$

dove

$$\partial_P^+ Q^+ = \partial_P Q^+ \cap \{t > 0\}, \quad \partial_P^- Q^+ = \partial_P Q^+ \cap \{t = 0\}.$$

Per il principio del confronto si ha

$$(23) \quad v_1 + v_2 - v_3 \leq u \leq v_1 + v_2 + v_3 \quad \text{in } Q^+,$$

di conseguenza è sufficiente dimostrare che vale

$$(24) \quad \sup_{Q_r^+} (|v_1| + |v_2| + |v_3|) \leq cr^\alpha,$$

per ogni r sufficientemente piccolo.

Poiché $\|g\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)} \leq M_3$, dal principio del confronto segue

$$|v_1(x, t)| \leq M_3 \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t, y, 0) \|(y, 0)\|_K^\alpha dy$$

quindi, per il Lemma 2.1, si trova

$$|v_1(x, t)| \leq M_3 c_\alpha \|(x, t)\|_K^\alpha.$$

Applichiamo poi il Lemma 2.2 con $R = 1$. Troviamo

$$\sup_{Q_r^+} |v_2| \leq C_0 \exp\left(-\frac{C_1}{r^2}\right) \sup_{\partial_P^+ Q^+} |v_2|$$

per ogni $r \leq \frac{1}{R_0}$. Poiché poi $|v_2|$ coincide con $|u|$ su $\partial_P^+ Q^+$, possiamo concludere che

$$\sup_{Q_r^+} |v_2| \leq C_0 M_1 \exp\left(-\frac{C_1}{r^2}\right) \leq c_2 r^2, \quad \text{per ogni } r \in \left]0, \frac{1}{R_0}\right].$$

Si ha infine

$$|v_3(x, t)| \leq \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t, y, s) dy ds \leq t \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(Q^+)} \leq M_2 \|(x, t)\|_K^2.$$

questo conclude la prova di (24) e del risultato del Lemma per $n = 0$.

Per $n = 1, 2$ utilizziamo lo stesso procedimento. In particolare, quando applichiamo il Lemma 2.1 con $\gamma = n + \alpha$, troviamo

$$|v_1(x, t)| \leq M_3 c_{n+\alpha} \|(x, t)\|_K^{n+\alpha}.$$

□

Proviamo ora le stime del problema dell'ostacolo vicino all'istante iniziale. Come già detto nell'Introduzione, faremo uso di un procedimento di “blow-up” per una funzione $v \in C(\Omega)$ ponendo

$$(25) \quad v^r(x, t) := v(\delta_r(x, t)), \quad r > 0,$$

per ogni $r > 0$ tale che $\delta_r(x, t) \in \Omega$. Un conto diretto mostra che

$$(26) \quad Lv = f \text{ in } \Omega \quad \text{se, e solo se,} \quad L_r v^r = r^2 f^r \text{ in } \delta_{1/r} \Omega,$$

dove

$$(27) \quad L_r = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^r \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m r b_i^r \partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t.$$

Osservazione 3.1. Dato $r \in]0, 1[$ ed $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$, poniamo

$$(28) \quad u^{r,(x_0,t_0)}(x, t) = u((x_0, t_0) \circ \delta_r(x, t)).$$

Risulta $u \in C_K^{n,\alpha}$ se, e solo se, $u^{r,(x_0,t_0)} \in C_K^{n,\alpha}$ e

$$\|u^{r,(x_0,t_0)}\|_{C_K^{n,\alpha}} \leq \|u\|_{C_K^{n,\alpha}}.$$

Infatti, nel caso $n = 0$ si ha

$$\|u^{r,(x_0,t_0)}\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u| + r^\alpha \sup_{\substack{z, \zeta \in \Omega \\ z \neq \zeta}} \frac{|u(z) - u(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|_K^\alpha} \leq \|u\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Inoltre

$$Lu = f \text{ in } (x_0, t_0) \circ \delta_r(\Omega) \quad \text{se, e solo se,} \quad L^{r,(x_0,t_0)} u^{r,(x_0,t_0)} = r^2 f^{r,(x_0,t_0)} \text{ in } \Omega,$$

dove

$$(29) \quad L_r^{(x_0,t_0)} = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{r,(x_0,t_0)}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m r b_i^{r,(x_0,t_0)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Pertanto, utilizzando le notazioni della seguente Definizione 3.2, si ha

$$u \in \mathcal{P}_n(L, (x_0, t_0) \circ \delta_r(\Omega), \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4) \implies \\ u^{r,(x_0,t_0)} \in \mathcal{P}_n(L_r^{(x_0,t_0)}, \Omega, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4).$$

Il risultato fondamentale riguardo alla regolarità vicino all'istante iniziale è il seguente Lemma, a cui premettiamo alcune notazioni

Definizione 3.2. Sia L u operatore della forma (1) che verifica le ipotesi **H1-4**, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un dato dominio, $n \in \{0, 1, 2\}$, $\alpha \in (0, 1]$ e siano M_1, M_2, M_3, M_4 quattro costanti positive. Diciamo che (u, f, g, ψ) appartiene alla classe $\mathcal{P}_n(L, \Omega, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4)$ se u è una soluzione forte del problema (4) con $f \in C_K^{0,\alpha}(\Omega)$, $\psi, g \in C_K^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$, $g \geq \psi$ su $\partial_P \Omega$ e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_1, \quad \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} \leq M_2, \quad \|g\|_{C_K^{n,\alpha}(\Omega)} \leq M_3, \quad \|\psi\|_{C_K^{n,\alpha}(\Omega)} \leq M_4.$$

Lemma 3.2. *Siano $R, \alpha \in]0, 1]$, $n = 0, 1, 2$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e siano M_1, M_2, M_3, M_4 quattro costanti assegnate. Supponiamo che*

$$(u, f, g, \psi) \in \mathcal{P}_n(L, Q_R^+(x_0, t_0), \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4).$$

Allora esiste $c = c(L, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4)$ tale che

$$\sup_{Q_r^+(x_0, t_0)} |u - g| \leq cr^{n+\alpha}, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 0, 1$$

$$\sup_{Q_r^+(x_0, t_0)} |u - g| \leq cr^2, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 2.$$

Dim. Mostriamo innanzitutto che esiste una costante positiva $C_\alpha = C(L, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ tale che

$$(30) \quad \inf_{Q_r^+(x_0, t_0)} u - g \geq -C_\alpha r^{n+\alpha}, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 0, 1$$

$$(31) \quad \inf_{Q_r^+(x_0, t_0)} u - g \geq -C_\alpha r^2, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 2.$$

Sia v una soluzione del problema di Dirichlet (9) sul dominio $\Omega = Q_r^+(x_0, t_0)$. Per il principio del confronto si ha $u \geq v$ e le disuguaglianze (30)-(31) sono conseguenza immediata del Lemma 3.1, dal momento che

$$(v, f, g) \in \mathcal{D}_n(L, Q_R^+(x_0, t_0), \alpha, M_1, M_2, M_3).$$

Concludiamo la prova del Lemma 3.2 basandoci sulle (30)-(31). Iniziamo con qualche considerazione preliminare finalizzata alla riduzione della complessità del problema. Come nella prova del Lemma 3.1, osserviamo che non è restrittivo supporre $(x_0, t_0) = (0, 0)$, $R = 1$ e $P_n^{(0,0)}g \equiv 0$. Per l'Osservazione 2.1, è quindi sufficiente dimostrare che

$$\sup_{Q_r^+(0,0)} |u| \leq cr^\gamma, \quad r \in]0, 1[,$$

dove $\gamma = \alpha + n$ se $n = 0, 1$ e $\gamma = 2$ se $n = 2$. Ricordiamo la definizione di $S_k^+(u)$ in (11). Vogliamo dimostrare che la (12) vale per ogni $k \in \mathbb{N}$, con un'opportuna costante positiva $\tilde{c} = \tilde{c}(L, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4)$. Infatti, un elementare ragionamento iterativo mostra che dalla (12) segue la disuguaglianza

$$S_k^+(u) \leq \frac{\tilde{c}}{2^{k\gamma}},$$

che è equivalente all'affermazione del Lemma 3.2.

Consideriamo dapprima il caso $n = 0$ e dimostriamo la (12) con $\gamma = \alpha$. Supponiamo che sia

$$(u, f, g, \psi) \in \mathcal{P}_0(L, Q^+, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4),$$

e dividiamo il ragionamento in tre passi.

Passo 1 (Inizio del ragionamento per assurdo). Osserviamo innanzitutto che da (30) segue

$$(32) \quad u(x, t) \geq -(C_\alpha + M_3) \|(x, t)\|_K^\alpha, \quad (x, t) \in Q^+.$$

Supponiamo che (12) sia falsa. Allora, per ogni $j \in \mathbb{N}$, esiste un numero naturale k_j ed una funzione $(u_j, f_j, g_j, \psi_j) \in \mathcal{P}_0(L, Q^+, \alpha, M_1, M_2, M_3, M_4)$ tale che $u_j(0, 0) = 0 \geq \psi_j(0, 0)$ e

$$(33) \quad S_{k_j+1}^+(u_j) > \max \left(\frac{j(C_\alpha + M_3)}{2^{(k_j+1)\alpha}}, \frac{S_{k_j}^+(u_j)}{2^\alpha}, \frac{S_{k_j-1}^+(u_j)}{2^{2\alpha}}, \dots, \frac{S_0^+(u_j)}{2^{(k_j+1)\alpha}} \right).$$

Per la definizione (11) deve esistere un punto (x_j, t_j) nella chiusura di $Q_{2^{-k_j-1}}^+$ tale che $|u_j(x_j, t_j)| = S_{k_j+1}^+(u_j)$ per ogni $j \geq 1$. A causa di (32) deve essere $u_j(x_j, t_j) > 0$. Inoltre, utilizzando (33) ed il fatto che $|u_j| \leq M_1$, deduciamo che la successione $j2^{-\alpha k_j}$ deve essere limitata e che, pertanto, $k_j \rightarrow \infty$ per $j \rightarrow \infty$.

Passo 2 (Costruzione del blow-up). Definiamo $(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j) = \delta_{2^{k_j}}((x_j, t_j))$ e $\tilde{u}_j : Q_{2^{k_j}}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$(34) \quad \tilde{u}_j(x, t) = \frac{u_j(\delta_{2^{-k_j}}(x, t))}{S_{k_j+1}^+(u_j)}.$$

Notiamo che $(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j)$ appartiene alla chiusura di $Q_{1/2}^+$ e che

$$(35) \quad \tilde{u}_j(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j) = 1.$$

Poniamo inoltre $\tilde{L}_j = L_{2^{-k_j}}$ (si veda (27) per la definizione dell'operatore riscalo),

$$(36) \quad \tilde{f}_j(x, t) = 2^{-2k_j} \frac{f_j(\delta_{2^{-k_j}}(x, t))}{S_{k_j+1}^+(u_j)}, \quad \tilde{g}_j(x, t) = \frac{g_j(\delta_{2^{-k_j}}(x, t))}{S_{k_j+1}^+(u_j)}, \quad \tilde{\psi}_j(x, t) = \frac{\psi_j(\delta_{2^{-k_j}}(x, t))}{S_{k_j+1}^+(u_j)}$$

per $(x, t) \in Q_{2^{k_j}}^+$. Dalla (26) segue che

$$\begin{cases} \max\{\tilde{L}_j \tilde{u}_j - \tilde{f}_j, \tilde{\psi}_j - \tilde{u}_j\} = 0, & \text{in } Q_{2^{k_j}}^+, \\ \tilde{u}_j = \tilde{g}_j, & \text{in } \partial_P Q_{2^{k_j}}^+. \end{cases}$$

Nel seguito $l \in \mathbb{N}$ indicherà una costante fissata che sarà precisata al successivo Passo 3. Risulta

$$(\tilde{u}_j, \tilde{u}_j, \tilde{f}_j, \tilde{\psi}_j) \in \mathcal{P}_0(\tilde{L}_j, Q_{2^l}^+, \alpha, \tilde{M}_1^j, \tilde{M}_2^j, \tilde{M}_3^j, \tilde{M}_4^j),$$

per opportune costanti $\tilde{M}_1^j, \tilde{M}_2^j, \tilde{M}_3^j, \tilde{M}_4^j$. Dalla (33) segue che

$$(37) \quad \tilde{M}_1^j = \sup_{Q_{2^l}^+} |\tilde{u}_j| = \frac{S_{k_j-l}^+(u_j)}{S_{k_j+1}^+(u_j)} \leq 2^{(l+1)\alpha} \quad \text{per ogni } k_j > l.$$

Inoltre, per l'Osservazione 3.1, si ha

$$(38) \quad \tilde{M}_2^j \leq 2^{-2k_j} \frac{M_2}{S_{k_j+1}^+(u_j)}.$$

Poniamo ora

$$(39) \quad m_j = \max \left\{ \|\tilde{g}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^+)}, \sup_{Q_{2^l}^+} \tilde{\psi}_j \right\}.$$

Allora, per la (33) e per la regolarità $C_K^{0,\alpha}$ di g_j e ψ_j , si trova

$$(40) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{M}_2^j = \lim_{j \rightarrow \infty} m_j = 0.$$

Si noti che non è detto che \tilde{M}_4^j tenda a zero per $j \rightarrow \infty$, in quanto sappiamo solamente che $\tilde{\psi}_j(0, 0) \leq 0$.

Passo 3 (Contraddizione). Alla fine di questa sezione sceglieremo l sufficientemente grande da raggiungere una contraddizione. In corrispondenza di l , scegliamo $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che $k_j > 2^l$ per ogni $j \geq j_0$. Poniamo

$$\partial_P^+ Q_R^+(0, 0, 1) = \partial_P Q_R^+(0, 0, 1) \cap \{t > 0\}, \quad \partial_P^- Q_R^+(0, 0, 1) = \partial_P Q_R^+(0, 0, 1) \cap \{t = 0\}.$$

Denotiamo con \tilde{v}_j la soluzione di

$$(41) \quad \begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{v}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^+)} & \text{in } Q_{2^l}^+, \\ \tilde{v}_j = \tilde{M}_1^j & \text{su } \partial_P^+ Q_{2^l}^+, \\ \tilde{v}_j = m_j & \text{su } \partial_P^- Q_{2^l}^+, \end{cases}$$

e dimostriamo che

$$(42) \quad \tilde{u}_j \leq \tilde{v}_j \text{ in } Q_{2^l}^+.$$

Per il principio del massimo si ha $\tilde{v}_j \geq m_j \geq \tilde{\psi}_j$ in $Q_{2^l}^+$. Inoltre

$$\tilde{L}_j(\tilde{v}_j - \tilde{u}_j) = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^+)} + \tilde{f}_j \leq 0 \quad \text{in } \Omega := Q_{2^l}^+ \cap \{(x, t) : \tilde{u}_j(x, t) > \tilde{\psi}_j(x, t)\},$$

e $\tilde{v}_j \geq \tilde{u}_j$ su $\partial\Omega$. La (42) segue allora dal principio del confronto. mostriamo ora che (42) è in contraddizione con (35). Scomponiamo la funzione \tilde{v}_j nel modo seguente: $\tilde{v}_j = w_j + \tilde{w}_j + \hat{w}_j$ su $Q_{2^l}^+(0, 0, 1)$, dove

$$\begin{cases} \tilde{L}_j w_j = 0 & \text{in } Q_{2^l}^+(0, 0, 1), \\ w_j = 0 & \text{su } \partial_P^+ Q_{2^l}^+(0, 0, 1), \\ w_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial_P^- Q_{2^l}^+(0, 0, 1), \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{w}_j = 0 & \text{in } Q_{2^l}^+(0, 0, 1), \\ \tilde{w}_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial_P^+ Q_{2^l}^+(0, 0, 1), \\ \tilde{w}_j = 0 & \text{su } \partial_P^- Q_{2^l}^+(0, 0, 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{L}_j \hat{w}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} & \text{in } Q_{2^l}^+(0, 0, 1), \\ \hat{w}_j = 0 & \text{su } \partial_P Q_{2^l}^+(0, 0, 1). \end{cases}$$

Utilizzando il principio del confronto si trova che

$$(43) \quad w_j \leq m_j \quad \text{in } Q_{2^l}^+(0, 0, 1),$$

e che

$$(44) \quad \|\hat{w}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^+(0, 0, 1))} \leq \|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^+)} \leq \tilde{M}_2^j.$$

Applichiamo ora il Lemma 2.2 al cilindro $Q_{2^l}^+(0, 0, 1)$, con $R = 1$ e $\tilde{R} = 2^l$. Utilizzando (37) otteniamo

$$(45) \quad \sup_{Q^+} \tilde{w}_j \leq C_0 e^{-C_1 4^l} \sup_{\partial_P^+ Q_{2^l}^+(0,0,1)} \tilde{v}_j \leq C_0 e^{-C_1 4^l} \tilde{M}_1^j \leq C_0 e^{-C_1 4^l} 2^{(l+1)\alpha}.$$

Osserviamo che il termine a destra della disuguaglianza può essere reso arbitrariamente piccolo, scegliendo l sufficientemente grande, indipendentemente da j . Combinando (43), (44) e (45) si conclude che, se l e j_0 sono sufficientemente grandi, si ha

$$\sup_{Q^+} \tilde{v}_j \leq \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } j \geq j_0.$$

Questa disuguaglianza contraddice (35) e (42) e conclude la prova del Lemma per $n = 0$.

La prova per $n = 1, 2$ è analoga. Si seguono i Passi 1 e 2, e si arriva a dimostrare che (40) vale anche per $n = 1, 2$. In entrambi i casi lo stesso ragionamento utilizzato in precedenza mostra che $\tilde{M}_2^j \rightarrow 0$ per $j \rightarrow \infty$. Proviamo ora che anche $m_j \rightarrow 0$ per $j \rightarrow \infty$. Consideriamo prima il caso $n = 1$. Sia (x, t) , un arbitrario punto di $Q_{2^l}^+$ e sia $\tilde{x} = E(-t)x$. Osserviamo che, per (13), risulta $(\tilde{x}, 0) = (x, t) \circ (0, t)^{-1} = (x, t) \circ (0, -t)$. Quindi, utilizzando la (19), troviamo

$$\|(\tilde{x}, 0)\|_K \leq c(\|(x, t)\|_K + \|(0, t)\|_K) \leq 2c\|(x, t)\|_K.$$

Di conseguenza si ha

$$(46) \quad \tilde{\psi}_j(x, t) = \tilde{\psi}_j(x, t) - \tilde{\psi}_j(\tilde{x}, 0) + \tilde{\psi}_j(\tilde{x}, 0) \leq |\tilde{\psi}_j(x, t) - \tilde{\psi}_j(\tilde{x}, 0)| + \tilde{g}_j(\tilde{x}, 0)$$

dove abbiamo usato l'ipotesi che $\tilde{\psi}_j(\tilde{x}, 0) \leq \tilde{g}_j(\tilde{x}, 0)$ per ogni $(\tilde{x}, 0) \in Q_{2^l}^+$. D'altra parte, per (36) risulta

$$(47) \quad |\tilde{\psi}_j(x, t) - \tilde{\psi}_j(\tilde{x}, 0)| \leq 2^{(\alpha+1)(l-k_j)} \frac{M_4}{S_{k_j+1}^+(u_j)} \rightarrow 0 \text{ per } j \rightarrow \infty.$$

Inoltre, poiché $P_1^{(0,0)} \tilde{g}_j = 0$, si ha anche

$$(48) \quad |\tilde{g}_j(\tilde{x}, 0)| \leq 2^{(\alpha+1)(l-k_j)} \frac{M_3}{S_{k_j+1}^+(u_j)} \rightarrow 0 \text{ per } j \rightarrow \infty.$$

Le disuguaglianze (46)-(48) combinate insieme mostrano che $m_j \rightarrow 0$ per $j \rightarrow \infty$ anche nel caso $n = 1$. Il caso $n = 2$ è analogo. \square

Osserviamo che nella prova del Lemma 3.2 non abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Harnack del Lemma 2.3. Quest'ultima è invece fondamentale nella prova del seguente Lemma, che costituisce il risultato fondamentale per la regolarità interna.

Definizione 3.3. *Sia L un operatore della forma (1) che verifica le ipotesi **H1-4**, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un dato dominio, $n \in \{0, 1, 2\}$, $\alpha \in (0, 1]$ e siano M_1, M_2, M_3 tre costanti positive. Diciamo che (u, f, g, ψ) appartiene alla classe $\mathcal{P}'_n(L, \Omega, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ se u è una soluzione forte del problema (4) con $f \in C_K^{0,\alpha}(\Omega)$, $\psi \in C_K^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$, $g \geq \psi$ su $\partial_P \Omega$ e*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_1, \quad \|f\|_{C_K^{0,\alpha}(\Omega)} \leq M_2, \quad \|\psi\|_{C_K^{n,\alpha}(\Omega)} \leq M_3.$$

Lemma 3.3. *Siano $R, \alpha \in]0, 1]$, $n = 0, 1, 2$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e siano M_1, M_2, M_3 tre costanti assegnate. Supponiamo che*

$$(u, f, g, \psi) \in \mathcal{P}'_n(L, Q_R(x_0, t_0), \alpha, M_1, M_2, M_3), \quad u(x_0, t_0) = \psi(x_0, t_0).$$

Allora esiste $c = c(L, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ tale che

$$\sup_{Q_r(x_0, t_0)} |u - P_n^{(x_0, t_0)} \psi| \leq cr^{n+\alpha}, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 0, 1,$$

$$\sup_{Q_r(x_0, t_0)} |u - \psi| \leq cr^2, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 2.$$

Dim. E' sufficiente dimostrare l'affermazione nella parte inferiore del cilindro $Q_r^-(x_0, t_0)$: precisamente basta dimostrare che esiste $c = c(L, \alpha, M_1, M_2, M_3)$ tale che

$$(49) \quad \begin{aligned} \sup_{Q_r^-(x_0, t_0)} |u - P_n^{(x_0, t_0)} \psi| &\leq cr^{n+\alpha}, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 0, 1, \\ \sup_{Q_r^-(x_0, t_0)} |u - \psi| &\leq cr^2, \quad r \in]0, R[, \quad \text{per } n = 2. \end{aligned}$$

Infatti dalle (49) segue in particolare che u verifica le ipotesi del Lemma 3.2 nel cilindro $Q_r^+(x_0, t_0)$ ed il risultato segue immediatamente dalla combinazione del Lemma 3.2 con (49).

Per provare le (49) si procede esattamente come nella prova del Lemma 3.2: si osserva che non è restrittivo considerare $(x_0, t_0) = (0, 0)$, $R = 1$ e $P_n^{(0,0)} \psi \equiv 0$. Sempre per

l'Osservazione 2.1, è poi sufficiente dimostrare che

$$\sup_{Q_r^-(0,0)} |u| \leq cr^\gamma, \quad r \in]0, 1[.$$

Si definisce la norma

$$S_k^-(u) = \sup_{Q_{2^{-k}}^-} |u|$$

invece di (11), e si suppone che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esista una funzione u_j tale che

$$S_{k_j+1}^-(u_j) > \max \left(\frac{jM_3}{2^{(k_j+1)\alpha}}, \frac{S_{k_j}^-(u_j)}{2^\alpha}, \frac{S_{k_j-1}^-(u_j)}{2^{2\alpha}}, \dots, \frac{S_0^-(u_j)}{2^{(k_j+1)\alpha}} \right).$$

Si prosegue seguendo il Passo 2 della dimostrazione del Lemma 3.2 e si verifica che risulta

$$(50) \quad \tilde{M}_1^j \leq 2^{(l+1)\alpha}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{M}_2^j = \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{M}_3^j = 0$$

invece di (37) e (40). Procediamo ora dettagliatamente con il terzo passo:

Passo 3 (Contraddizione). Scegliremo l sufficientemente grande da raggiungere una contraddizione. In corrispondenza di l , scegliamo $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che $k_j > 2^l$ per ogni $j \geq j_0$. Poniamo \hat{g}_j uguale al valore di \tilde{u}_j sul bordo $\partial_P Q_{2^l}^-$ e denotiamo con v_j e \tilde{v}_j le soluzioni dei problemi

$$(51) \quad \begin{cases} \tilde{L}_j v_j = \|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} & \text{in } Q_{2^l}^-, \\ v_j = \hat{g}_j & \text{su } \partial_P Q_{2^l}^-, \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{v}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} & \text{in } Q_{2^l}^-, \\ \tilde{v}_j = \max\{\hat{g}_j, \tilde{M}_3^j\} & \text{su } \partial_P Q_{2^l}^-. \end{cases}$$

Dimostriamo che risulta

$$(52) \quad v_j \leq \tilde{u}_j \leq \tilde{v}_j \text{ in } Q_{2^l}^-.$$

La prima disuguaglianza in (52) segue dal principio del confronto. Per provare la seconda, osserviamo innanzitutto che $\|\tilde{\psi}_j\|_\infty \leq \tilde{M}_3^j$ e quindi, per il principio del confronto, $\tilde{v}_j \geq \tilde{\psi}_j$ in $Q_{2^l}^-$. Inoltre

$$\tilde{L}_j(\tilde{v}_j - \tilde{u}_j) = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} + \tilde{f}_j \leq 0 \quad \text{in } \Omega := Q_{2^l}^- \cap \{(x, t) : \tilde{u}_j(x, t) > \tilde{\psi}_j(x, t)\},$$

e $\tilde{v}_j \geq \tilde{u}_j$ in $\partial\Omega$. La seconda disuguaglianza in (52) segue quindi dal principio del massimo.

Osserviamo che, poiché $\tilde{u}_j \geq \tilde{\psi}_j$ si ha $\hat{g}_j \geq -\tilde{M}_3^j$ in $Q_{2^l}^-$. Quindi, per il principio del confronto, si ha per ogni T positivo

$$(53) \quad \tilde{v}_j(x, t) - v_j(x, t) \leq \left(\max\{0, \tilde{M}_3^j - \hat{g}_j\} + 2T\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} \right) \leq 2 \left(\tilde{M}_3^j + T\tilde{M}_2^j \right)$$

per ogni $(x, t) \in Q_{2^l}^-(0, 0, T)$. Affermiamo ora che esiste una costante positiva C tale che

$$(54) \quad \tilde{v}_j(x, t) \geq C \quad \text{per ogni } (x, t) \in Q_{1/2}^-, \quad j \geq j_0.$$

Una volta provata tale affermazione, da (53) e da (52) segue che

$$\tilde{u}_j(0, 0) \geq v_j(0, 0) \geq \tilde{v}_j(0, 0) - 2 \left(\tilde{M}_3^j + T\tilde{M}_2^j \right) \geq C - 2 \left(\tilde{M}_3^j + T\tilde{M}_2^j \right).$$

Inoltre, utilizzando (50), si trova infine che $\tilde{u}_j(0, 0) > 0$ per ogni j sufficientemente grande. questo fatto contraddice l'ipotesi che $\tilde{u}_j(0, 0) = \tilde{\psi}_j(0, 0) = 0$. Resta pertanto conclusa la dimostrazione per assurdo.

Per dimostrare la (54) utilizziamo i Lemmi 2.3 e 2.2 con $R = 1/2$ e

$$(55) \quad \tilde{R} = \left(\frac{2^l}{c} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}$$

dove c è la costante del Lemma 2.3. Rappresentiamo la funzione \tilde{v}_j su $Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1)$ nel modo seguente: $\tilde{v}_j = w_j + \tilde{w}_j + \hat{w}_j$, dove

$$\begin{cases} \tilde{L}_j w_j = 0 & \text{in } Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1), \\ w_j = 0 & \text{su } \partial_P^+ Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1), \\ w_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial_P^- Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1), \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{w}_j = 0 & \text{in } Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1), \\ \tilde{w}_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial_P^+ Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1), \\ \tilde{w}_j = 0 & \text{su } \partial_P^- Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{L}_j \hat{w}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} & \text{in } Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1), \\ \hat{w}_j = 0 & \text{su } \partial_P Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1). \end{cases}$$

Per il principio del massimo si ha

$$(56) \quad 0 \leq \hat{w}_j(x, t) \leq (t+1)\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} \leq \tilde{M}_2^j,$$

per ogni $(x, t) \in Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1)$. Risulta quindi $|\hat{w}_j(x, t)| \leq 1/4$ in $Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1)$ per ogni j sufficientemente grande e per ogni $t \in]-1, 0[$. Poiché

$$\|\tilde{v}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} \leq \max \left\{ 2^{(l+1)\alpha}, \tilde{M}_3^j \right\} + 2^{2l} \tilde{M}_2^j,$$

per il Lemma 2.2 si trova

$$\sup_{Q_{1/2}^-} |\tilde{w}_j| \leq C_0 e^{-C_1 \tilde{R}^2} \sup_{\partial_P^+ Q_{\tilde{R}}^-} |v| \leq C_0 e^{-C_1 \tilde{R}^2} \left(\max \left\{ 2^{(l+1)\alpha}, \tilde{M}_3^j \right\} + 2^{2l} \tilde{M}_2^j \right).$$

Notiamo poi che, per la nostra scelta di (55), il membro di destra della disuguaglianza tende a zero per $l \rightarrow \infty$. Ricordando che $\tilde{v}_j(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j) \geq \tilde{u}_j(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j) = 1$, possiamo concludere che, scegliendo l sufficientemente grande, otteniamo

$$w_j(\tilde{x}_j, \tilde{t}_j) \geq \frac{1}{2}, \quad j \geq j_0.$$

Per il principio del massimo esiste almeno un punto $(\bar{x}_j, \bar{t}_j) \in \partial_P^- Q_{\tilde{R}}^-(0, 0, 1)$ tale che

$$(57) \quad \tilde{v}_j(\bar{x}_j, \bar{t}_j) = w_j(\bar{x}_j, \bar{t}_j) \geq \frac{1}{2}, \quad j \geq j_0.$$

Scriviamo ora $\tilde{v}_j = \check{v}_j + \hat{v}_j$ dove

$$\begin{cases} \tilde{L}_j \check{v}_j = 0 & \text{in } Q_{2^l}^-(0, 0, 2), \\ \check{v}_j = \tilde{v}_j & \text{su } \partial_P Q_{2^l}^-(0, 0, 2). \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{L}_j \hat{v}_j = -\|\tilde{f}_j\|_{L^\infty(Q_{2^l}^-)} & \text{in } Q_{2^l}^-(0, 0, 2), \\ \hat{v}_j = 0 & \text{su } \partial_P Q_{2^l}^-(0, 0, 2). \end{cases}$$

Come in (56), è facile verificare che $|\hat{v}_j(x, t)| \leq 1/4$ in $Q_{2^l}^-(0, 0, 2)$ per j sufficientemente grande. Possiamo quindi concludere che

$$\check{v}_j(\bar{x}_j, \bar{t}_j) \geq \frac{1}{4}, \quad j \geq j_0.$$

Per il Lemma 2.3 troviamo allora

$$\inf_{Q_{1/2}^-} \check{v}_j \geq \frac{1}{4\tilde{c}}.$$

Poiché $\hat{v}_j \rightarrow 0$ uniformemente in $Q_{2^l}^-(0, 0, 2)$, per $j \rightarrow \infty$, concludiamo che

$$\inf_{Q_{1/2}^-} \tilde{v}_j \geq \inf_{Q_{1/2}^-} \check{v}_j - \|\hat{v}_j\|_{L^\infty} \geq \frac{1}{8\tilde{c}}$$

per ogni j sufficientemente grande. Questo conclude la prova di (54) e, quindi, la prova del Lemma 3.3 nel caso $n = 0$. Per $n = 1$ e 2 il procedimento è analogo. Per la dimostrazione dettagliata rimandiamo al lavoro [5]. \square

4. PROVA DEI TEOREMI 1.1 E 1.2

La prova dei tre Teoremi si basa sull'applicazione dei Lemmi 3.1, 3.2 e 3.3. Ci limitiamo qui a riportare alcuni dettagli della prova del punto (i) dei Teoremi 1.1 e 1.2, rimandiamo ai lavori [5] e [12] per la dimostrazione completa.

Dimostrazione del Teorema 1.1-i). Fissiamo una costante $R \in]0, 1[$ tale che $Q_{2R} \subseteq Q_{2RC_1}(\hat{x}, \hat{t}) \subseteq Q$ per ogni $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_{2R}$, dove C_1 è la costante in (20). Denotiamo $\mathcal{F} = \overline{Q_{2R}} \cap \{(x, t) : u(x, t) = \psi(x, t)\}$. Se l'insieme \mathcal{F} è vuoto, allora l'affermazione segue immediatamente dalle stime interne di Schauder (10). Supponiamo quindi che \mathcal{F} non sia vuoto, e dimostriamo che esiste una costante positiva $\hat{c} = \hat{c}(N, \lambda, \alpha, \mathbf{c}_\alpha, M_1, M_2, M_3)$ tale che

$$(58) \quad \sup_{\substack{(x,t), (\hat{x}, \hat{t}) \in Q_R \\ (x,t) \neq (\hat{x}, \hat{t})}} \frac{|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})|}{\|(\hat{x}, \hat{t})^{-1} \circ (x, t)\|_K^\alpha} \leq \hat{c}.$$

Se $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_{2R} \cap \mathcal{F}$, allora applichiamo il Lemma 3.2 e otteniamo

$$(59) \quad |u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| \leq c \|(\hat{x}, \hat{t})^{-1} \circ (x, t)\|_K^\alpha \quad \text{for every } (x, t) \in Q_{2RC_1}(\hat{x}, \hat{t}).$$

Lo stesso risultato vale ovviamente quando $(x, t) \in Q_R \cap \mathcal{F}$. Per concludere la dimostrazione del Teorema 1.1 supponiamo quindi che sia $(x, t), (\hat{x}, \hat{t}) \in Q_R \setminus \mathcal{F}$. Sia $r = d_K((x, t), \mathcal{F})$ la distanza di (x, t) da \mathcal{F} definita in (21), e sia $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \mathcal{F}$ un punto tale che $r = d_K((x, t), (\tilde{x}, \tilde{t}))$.

Caso 1. Supponiamo $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_R \setminus Q_{r/2}(x, t)$. Allora $d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t})) > c_0 r$ per una certa costante positiva c_0 . Dalla disuguaglianza triangolare (19) segue allora

$$(60) \quad d_K((\hat{x}, \hat{t}), (\tilde{x}, \tilde{t})) \leq c (d_K((x, t), (\tilde{x}, \tilde{t})) + c d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t}))).$$

Ricordando che $d_K((x, t), (\tilde{x}, \tilde{t})) \leq \frac{1}{c_0} d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t}))$, ed utilizzando (59), si trova

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| &\leq |u(x, t) - u(\tilde{x}, \tilde{t})| + |u(\hat{x}, \hat{t}) - u(\tilde{x}, \tilde{t})| \\ &\leq c (d_K((x, t), (\tilde{x}, \tilde{t}))^\alpha + d_K((\hat{x}, \hat{t}), (\tilde{x}, \tilde{t}))^\alpha) \leq \hat{c} \|(\hat{x}, \hat{t})^{-1} \circ (x, t)\|_K^\alpha, \end{aligned}$$

per un'opportuna costante positiva \hat{c} che dipende solo da c_0 e dalla costante c in (19).

Caso 2. Supponiamo che $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_{r/2}(x, t)$. Poniamo

$$v(\hat{x}, \hat{t}) = u(\hat{x}, \hat{t}) - u(\tilde{x}, \tilde{t}).$$

Dalla (60) segue che esiste una costante positiva c_1 tale che $|v(\hat{x}, \hat{t})| \leq c_1 r^\alpha$. Di conseguenza, la funzione $w(y, s) = \frac{v^{r, (x, t)}(y, s)}{r^\alpha}$ soddisfa

$$(61) \quad |w(y, s)| \leq c_1 \quad \text{e} \quad L^{r, (x, t)} w(y, s) = r^{2-\alpha} f^{r, (x, t)}(y, s) \quad \text{per } (y, s) \in Q_{1/2}.$$

Pertanto, per le stime di Schauder (10), si ha

$$|w(y, s) - w(0, 0)| \leq \hat{c}_1 \| (y, s) \|_K^\alpha,$$

per una costante positiva \hat{c}_1 che dipende solo da c_1 e dalla costante in (10). Quindi, se consideriamo il punto $(\hat{x}, \hat{t}) = (x, t) \circ \delta_r(y, s)$, troviamo

$$|u(\hat{x}, \hat{t}) - u(x, t)| \leq \hat{c}_1 \| (x, t)^{-1} \circ (\hat{x}, \hat{t}) \|_K^\alpha.$$

Questo conclude la prova del Teorema 1.1-*i*). □

Dimostrazione del Teorema 1.2- i). Per la (20) esistono due costanti positive C_1 ed R tali che $Q_{2R} \subseteq Q_{2RC_1}(x, t) \subset Q$ per ogni $(x, t) \in Q_{2R}^+$. Grazie ad un elementare ragionamento di ricoprimento e all'Osservazione 3.1, è sufficiente considerare il caso di $\Omega = Q^+$ ed $\Omega' = Q_R^+$. Ci proponiamo di dimostrare che

$$(62) \quad \sup_{\substack{(x, t), (\hat{x}, \hat{t}) \in Q_R^+ \\ (x, t) \neq (\hat{x}, \hat{t})}} \frac{|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})|}{d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t}))^\alpha} \leq c,$$

per un'opportuna costante positiva $c = c\left(\alpha, L, \|f\|_{C_K^{0, \alpha}(Q^+)}, \|g\|_{C_K^{0, \alpha}(Q^+)}, \|\psi\|_{C_K^{0, \alpha}(Q^+)}\right)$.

Se $t = 0$ allora (62) segue dall'applicazione del Lemma 3.2 al cilindro $Q_{2RC_1}^+(x, 0)$. Più precisamente, utilizziamo il fatto che

$$(63) \quad |u(\xi, \tau) - u(x, 0)| \leq |u(\xi, \tau) - g(\xi, \tau)| + |g(\xi, \tau) - g(x, 0)| \leq c d_K((\xi, \tau), (x, 0))^\alpha,$$

in quanto $g \in C_K^{0, \alpha}(Q)$. Ovviamente, quanto appena detto vale anche per $\hat{t} = 0$, pertanto non ci resta che considerare il caso in cui t e \hat{t} sono strettamente positivi. Poniamo $(\tilde{x}, 0) = (x, t) \circ (0, t)^{-1} = (E(-t)x, 0)$ in modo che risulti $d_K((x, t), (\tilde{x}, 0)) = \sqrt{t}$.

Caso 1. Supponiamo $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_R^+ \setminus Q_{\frac{\sqrt{t}}{2}}(x, t)$. Si ha allora

$$(64) \quad \begin{aligned} d_K((\hat{x}, \hat{t}), (\tilde{x}, 0)) &\leq c (d_K((x, t), (\tilde{x}, 0)) + d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t}))) \leq 2c d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t})), \\ d_K((x, t), (\tilde{x}, 0)) &\leq 2 d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t})). \end{aligned}$$

Pertanto

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| \leq |u(x, t) - u(\tilde{x}, 0)| + |u(\hat{x}, \hat{t}) - u(\tilde{x}, 0)| \leq$$

(per la (63))

$$\leq c_1 (d_K((x, t), (\tilde{x}, 0))^\alpha + d_K((\hat{x}, \hat{t}), (\tilde{x}, 0))^\alpha)$$

(per la (64))

$$\leq c_2 d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t}))^\alpha.$$

Caso 2. Supponiamo $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_R^+ \cap Q_{\frac{\sqrt{t}}{2}}(x, t)$ ed osserviamo che $Q_{\sqrt{t}}(x, t) \subseteq Q_{2R}^+$. Sempre per la (63), si ha

$$\|u - u(x, t)\|_{L^\infty(Q_{\sqrt{t}}(x, t))} \leq \|u - u(\tilde{x}, 0)\|_{L^\infty(Q_{\sqrt{t}}(x, t))} + |u(x, t) - u(\tilde{x}, 0)| \leq ct^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Poniamo allora

$$(65) \quad v(y, s) = \frac{u((x, t) \circ \delta_{\sqrt{t}}(y, s)) - u(x, t)}{t^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad (y, s) \in Q.$$

Per le stime precedenti si ha $\|v\|_{L^\infty(Q)} \leq c$ e quindi, utilizzando il punti *i*) del Teorema 1.1, si ottiene

$$|v(y, s)| \leq c_3 \|(y, s)\|_K^\alpha, \quad \text{per ogni } (y, s) \in Q_{1/2}.$$

Invertendo il cambiamento di variabile si verifica che la precedente disuguaglianza è equivalente alla seguente

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| \leq c_3 d_K((x, t), (\hat{x}, \hat{t}))^\alpha.$$

Questo conclude la prova del Teorema 1.2-*i*). □

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. BENSOUSSAN, *On the theory of option pricing*, Acta Appl. Math., 2 (1984), pp. 139–158.
- [2] L. CAFFARELLI, A. PETROSYAN, AND H. SHAHGHOLIAN, *Regularity of a free boundary in parabolic potential theory*, J. Amer. Math. Soc., 17 (2004), pp. 827–869 (electronic).
- [3] M. DI FRANCESCO, A. PASCUCCI, AND S. POLIDORO, *The obstacle problem for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 464 (2008), pp. 155–176.
- [4] M. DI FRANCESCO AND S. POLIDORO, *Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov-type operators in non-divergence form*, Adv. Differential Equations, 11 (2006), pp. 1261–1320.
- [5] M. FRENTZ, K. NYSTRÖM, A. PASCUCCI, AND S. POLIDORO, *Optimal regularity in the obstacle problem for Kolmogorov operators related to American Asian options*, in corso di stampa su Math. Ann., (2009).
- [6] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119 (1967), pp. 147–171.
- [7] P. JAILLET, D. LAMBERTON, AND B. LAPEYRE, *Variational inequalities and the pricing of American options*, Acta Appl. Math., 21 (1990), pp. 263–289.
- [8] I. KARATZAS, *On the pricing of American options*, Appl. Math. Optim., 17 (1988), pp. 37–60.
- [9] E. LANCONELLI AND S. POLIDORO, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 52 (1994), pp. 29–63.
- [10] M. MANFREDINI, *The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations*, Adv. Differential Equations, 2 (1997), pp. 831–866.
- [11] K. NYSTRÖM, *On the behaviour near expiry for multi-dimensional American options*, J. Math. Anal. Appl., 339 (2008), pp. 644–654.
- [12] K. NYSTRÖM, A. PASCUCCI, AND S. POLIDORO, *Regularity near the Initial State in the Obstacle Problem for a class of Hypoelliptic Ultraparabolic Operators*, (sottoposto ad una rivista), (2009).
- [13] A. PASCUCCI, *Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options*, Finance Stoch., 12 (2008), pp. 21–41.
- [14] A. PETROSYAN AND H. SHAHGHOLIAN, *Parabolic obstacle problems applied to finance*, in Recent developments in nonlinear partial differential equations, vol. 439 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 117–133.
- [15] H. SHAHGHOLIAN, *Free boundary regularity close to initial state for parabolic obstacle problem*, Trans. Amer. Math. Soc., 360 (2008), pp. 2077–2087.